

适用于超声速流场计算的有限体积紧致算法

朱志斌, 袁湘江, 陈 林

(中国航天空气动力技术研究院 空气动力理论与应用研究所, 北京 100074)

摘 要: 结合紧致格式与有限体积法两者的优点, 提出了一种基于有限体积的紧致算法. 采用特征处理的通量限制方法抑制紧致格式在间断附近的非物理振荡, 将该算法应用于航天领域超声速流场的数值模拟. 通过计算典型算例, 并与其他格式计算结果进行对比, 证明了该算法能够无振荡捕捉各种间断, 且对波系结构的刻画最为锐利, 并能够精细分辨小尺度流场结构, 计算结果与精确解最为接近.

关 键 词: 超声速流动; 有限体积法; 紧致格式; 高精度; 高分辨率; 非物理振荡

中图分类号: V211.3

文献标志码: A

Finite volume compact algorithm suited to computation of supersonic flow field

ZHU Zhi-bin, YUAN Xiang-jiang, CHEN Lin

(School of Aerodynamic Theory and Application,
China Academy of Aerospace Aerodynamics, Beijing 100074, China)

Abstract: In order to combine the advantages, a compact scheme based on finite volume method was developed. A characteristic limiter was used to prevent non-physical oscillations across discontinuity, so the scheme was suited to simulate supersonic flows in aerospace flight. The performance of the scheme was assessed by computing several typical problems. Numerical results reveal that the present scheme can capture discontinuities with few oscillations and simulate various waves sharply; besides, the scheme is able to distinguish small-scale flow structures clearly, and the results solved by the scheme are highly consistent with exact solutions.

Key words: supersonic flow; finite volume method; compact schemes;
high-order accuracy; high resolution ratio; non-physical oscillations

在过去的几十年中,为获得高阶精度的计算结果,发展了多种高阶格式,包括 ENO(essentially non-oscillatory)^[1], WENO(weighted essentially non-oscillatory)^[2], 高阶紧致格式^[3]等,并成功用于各种流动计算. 紧致格式以较少的网格点数和较高精度受到众多学者的关注和研究. 但紧致格式在计算包含激波等间断的流场时,将产生比较严重的非物理振荡. 如何抑制紧致格式的非物理振荡成为紧致格式研究的重点. 国内外研究者普遍采用将紧致格式与激波捕捉格式(total

variation-diminishing, TVD^[4-5] 及 ENO/WENO)相结合的方法. Adams 和 Shariff^[6], Pirozzoli^[7], 以及国内的 XIE 等^[8], 任玉新等^[9]提出了紧致格式与 ENO/WENO 的混合格式,这类混合格式在格式的切换点附近易产生虚假波动. Ravichandran^[10]构造了 TVD 型混合格式;国内的涂国华等^[11]构造了非线性 TVD 型紧致格式(CTVD). 该类格式通过限制器来抑制紧致格式在模拟间断流场的非物理振荡,过间断无振荡,但在极值点处的精度受到一些影响.

紧致格式主要应用于有限差分法中,但有限体积法具有逐点守恒特性,更适于求解包含激波等间断的流场问题.本文在结构网格中,提出了一种有限体积紧致算法(compact-scheme on finite volume method,CFVM).考虑到通量迎风特性,采用偏心型紧致格式进行插值,运用特征型通量限制方法^[12-13]抑制非物理振荡,以使算法能够应用于航天领域超声速流场的计算.通过典型算例的数值试验,验证算法的计算效果.

1 算法构造

1.1 有限体积的紧致格式推导

考虑单个守恒方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

在等间距网格上对方程进行有限体积离散,网格间距 Δx ,在网格单元 i 内对上式进行积分,可得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} u dx + f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} = 0 \quad (2)$$

格心点变量为网格单元平均值

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} u(x) dx \quad (3)$$

近似认为

$$\bar{f}_i = f(\bar{u}_i) \quad (4)$$

由 $\bar{f}_i$ 对 $f_{i+\frac{1}{2}}$, $f_{i-\frac{1}{2}}$ 的插值格式具体推导方法如下:

设函数 $h(x)$, 满足

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} h(\zeta) d\zeta \quad (5)$$

定义 $h(x)$ 的原函数

$$H(x) = \int_{-\infty}^x h(\zeta) d\zeta \quad (6)$$

由 $\bar{f}_i$ 为函数 $h(x)$ 在 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ 中的平均值,可得

$$H(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=-\infty}^i \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} h(\zeta) d\zeta = \Delta x \sum_{j=-\infty}^i \bar{f}_j \quad (7)$$

对 $H(x)$ 求导的紧致格式一般形式可写为

$$\sum_m \alpha_m H'_{i+m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \sum_n \bar{\beta}_n H_{i+n+\frac{1}{2}} \quad (8)$$

即

$$\sum_m \alpha_m h_{i+m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \sum_n \beta_n (H_{i+n+\frac{1}{2}} - H_{i+n-\frac{1}{2}}) \quad (9)$$

式中 m, n 取值范围根据格式形式及精度确定.

将式(9)左右两边在 $i + \frac{1}{2}$ 处进行 Taylor 展开,根据精度要求,求解方程组,可得系数 α_m, β_n 的值.

由

$$\bar{f}_{i+n} \Delta x = H_{i+n+\frac{1}{2}} - H_{i+n-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

式(9)可变换为对 $h_{i+m+\frac{1}{2}}$ 的紧致插值格式

$$\sum_m \alpha_m h_{i+m+\frac{1}{2}} = \sum_n \beta_n \bar{f}_{i+n} \quad (11)$$

记

$$\hat{f} s_{i+m+\frac{1}{2}}^{\pm} = h_{i+m+\frac{1}{2}}^{\pm} \quad (12)$$

本文在有限体积结构网格格心点对通量进行分解后插值,内点采用的单侧三点 5 阶迎风紧致格式,边界采用 4 阶对称格式,具体格式如下:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^+ + \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^+ + \frac{1}{6} \hat{f}_{i+\frac{3}{2}}^+ = \\ \frac{1}{18} \bar{f}_{i-1}^+ + \frac{19}{18} \bar{f}_i^+ + \frac{5}{9} \bar{f}_{i+1}^+ \\ \frac{1}{6} \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^- + \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2} \hat{f}_{i+\frac{3}{2}}^- = \\ \frac{5}{9} \bar{f}_i^- + \frac{19}{18} \bar{f}_{i+1}^- + \frac{1}{18} \bar{f}_{i+2}^- \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \hat{f}_{i-1}^+ + \hat{f}_i^+ + \frac{1}{4} \hat{f}_{i+1}^+ = \frac{3}{4} \bar{f}_{i-1}^+ + \frac{3}{4} \bar{f}_i^+ \\ \frac{1}{4} \hat{f}_{i-1}^- + \hat{f}_i^- + \frac{1}{4} \hat{f}_{i+1}^- = \frac{3}{4} \bar{f}_{i-1}^- + \frac{3}{4} \bar{f}_i^- \end{cases} \quad (14)$$

1.2 抑制振荡方法

由于双曲系统的信息沿着特征方向传播,把通量投影到特征空间中处理.通量的流动量在特征空间中的投影为

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{W}}_{i+\frac{1}{2}}^+ &= \mathbf{L}_{i+\frac{1}{2}}^+ (\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}^+ - \bar{\mathbf{f}}_i^+) \\ \Delta \hat{\mathbf{W}}_{i+\frac{1}{2}}^- &= \mathbf{L}_{i+\frac{1}{2}}^- (\bar{\mathbf{f}}_{i+1}^- - \hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}^-) \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\mathbf{L}_{i+\frac{1}{2}}^{\pm}$ 为 $\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}^{\pm}$ 的左特征矩阵,则它的右特征矩阵 $\mathbf{R}_{i+\frac{1}{2}}^{\pm} = (\mathbf{L}_{i+\frac{1}{2}}^{\pm})^{-1}$. $\mathbf{A}$ 为 Jacobi 矩阵, $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$. $\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}^+$ 和 $\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}^-$ 可以分别取 $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{i+1}$.

$\Delta \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^{\pm}$ 体现了特征波在传播过程中的幅值变化情况,对 $\Delta \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^{\pm}$ 进行限制,使其尽量满足熵条件.本文采用限制器来对 $\Delta \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^{\pm}$ 进行限制,得到如下修正后的特征信息:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^+ = \varphi(\Delta \hat{\mathbf{W}}_{i+\frac{1}{2}}^+, \Delta \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^+, \Delta \mathbf{W}_{i-\frac{1}{2}}^+) \\ \delta \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^- = \varphi(\Delta \hat{\mathbf{W}}_{i+\frac{1}{2}}^-, \Delta \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^-, \Delta \mathbf{W}_{i+\frac{3}{2}}^-) \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\Delta W_{i+\frac{1}{2}}^{\pm} = L_{i+\frac{1}{2}}^{\pm}(f_{i+1}^{\pm} - f_i^{\pm})$, 即通量的空间差量 $\Delta f_{i+\frac{1}{2}}^{\pm} = f_{i+1}^{\pm} - f_i^{\pm}$ 在特征方向上的投影, 可近

似代表 i 和 $i+1$ 点之间通量沿特征方向的变化. φ 为限制器, 本文选取的限制器形式如下:

$$\varphi = \begin{cases} \text{sign } a \cdot \min \left(|a|, |b|, \frac{2bc}{|a|+|c|+\epsilon} \right) & \text{若 } a, b, c \text{ 同号} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (17)$$

其中 ϵ 是一个任意小正数, 用来防止被零除, 本文取 $\epsilon = 1.0 \times 10^{-9}$.

最后, 再把通量还原成守恒形式

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}}^{+} &= f_i^{+} + R_{i+\frac{1}{2}}^{+} \Delta W_{i+\frac{1}{2}}^{+} \\ F_{i+\frac{1}{2}}^{-} &= f_{i+1}^{-} - R_{i+\frac{1}{2}}^{-} \Delta W_{i+\frac{1}{2}}^{-} \end{aligned} \quad (18)$$

2 算法验证

2.1 Sod 问题

Sod 问题中包含有激波、膨胀波、接触间断等基本流动间断, 是检验计算格式捕捉间断能力的一个重要算例^[14]. 设该问题的初始条件为

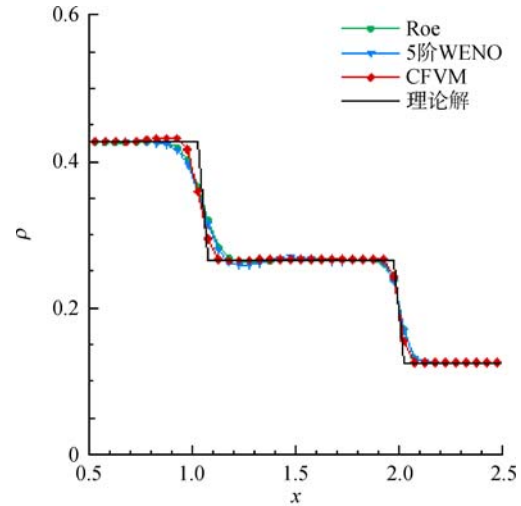
$$(\rho \quad u \quad p) = \begin{cases} (1 \quad 0 \quad 1) & (-3 \leq x < 0) \\ (0.125 \quad 0 \quad 0.1) & (0 \leq x < 3) \end{cases}$$

式中 ρ 为密度, u 为速度, p 为压强.

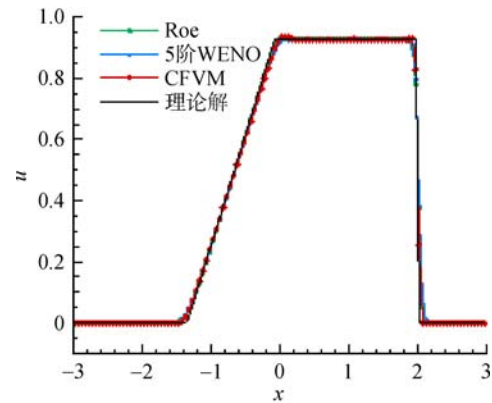
Sod 问题中波系由中心向两边传播, 本文计算网格数取 121. 在无量纲时间 $t = 1.14$ 时, 本文发展的 CFVM 格式与 5 阶 WENO 格式及 Roe 格式 (monotonic up-stream-centered scheme for conservation laws, MUSCL 插值) 在同一计算网格下以相同时间步长进行计算, 结果对比如图 1. 从图中可以看出, 3 种方法在间断处基本无振荡, CFVM 格式对激波和接触间断的捕捉更为锐利, 与理论解最为接近.

2.2 激波反射问题

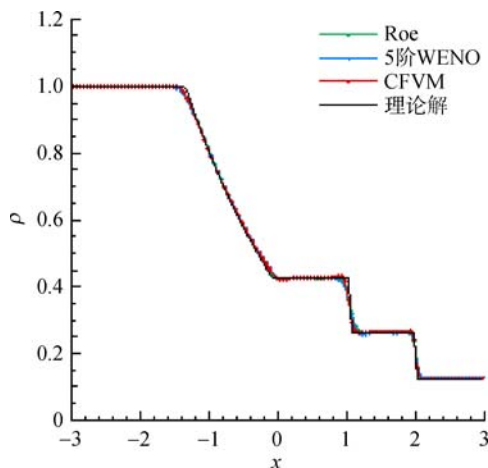
Sod 问题^[15]中来流马赫数为 2.9, 激波入射角为 29° , 入射激波过点 $(0, 1)$. 平板水平置于 $x =$



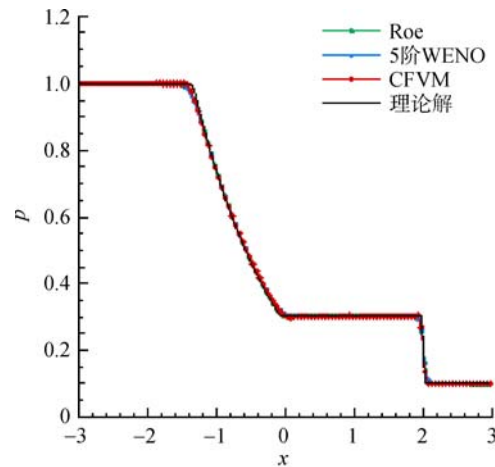
(b) 密度放大图



(c) 速度



(a) 密度



(d) 压强

图 1 Sod 问题计算结果对比

Fig. 1 Result comparison of Sod problem

0 处,以无穷远来流参数作无量纲化.计算区域为 $x \in [0, 4]$, $y \in [0, 1]$,计算网格为等间距网格 81×41 .入口边界为来流条件,出口边界由内场外插得到,上边界为波后条件,由 Rankine-Hugoniot^[16] 激波关系式确定.下边界取无渗透边界条件.

下面给出 CFVM 格式、Roe 格式及 5 阶 WENO 格式在同一计算网格以相同迭代步数的计算结果.图 2 给出了沿 $y=1/2$ 处的压强分布对比,图 3 为压强等值线图.对比不同格式的计算结果可以看出,Roe 格式捕捉激波的宽度最大,5 阶 WENO 格式次之,且在激波后出现轻微振荡,本文提出的 CFVM 格式捕捉激波最为精细,捕捉激波所需网格点最少,且过激波无振荡.

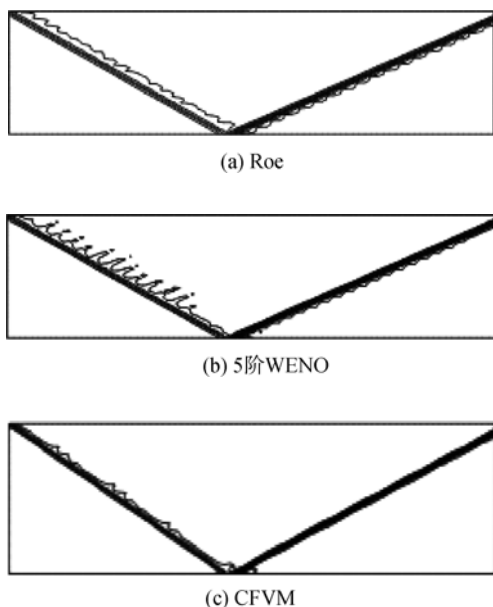
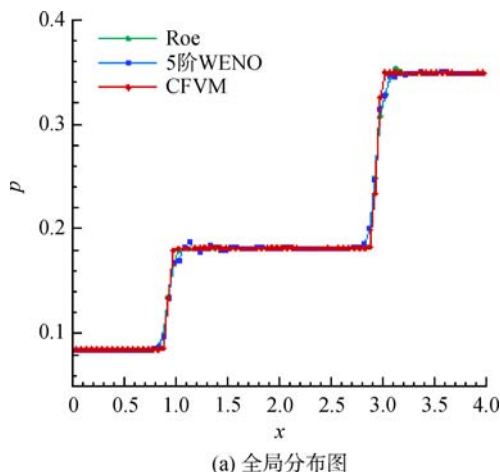
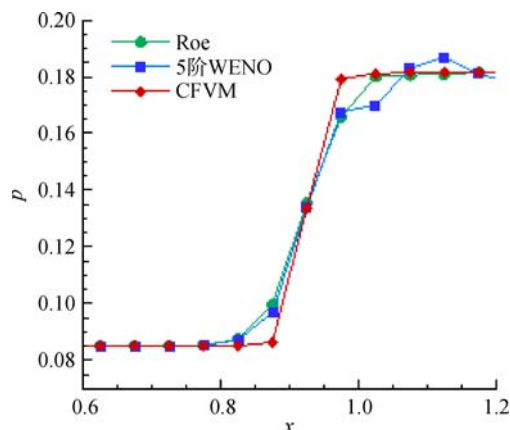


图 2 激波反射问题的压强等值线
(15 条等值线 ($p=0.1 \sim 0.38$))

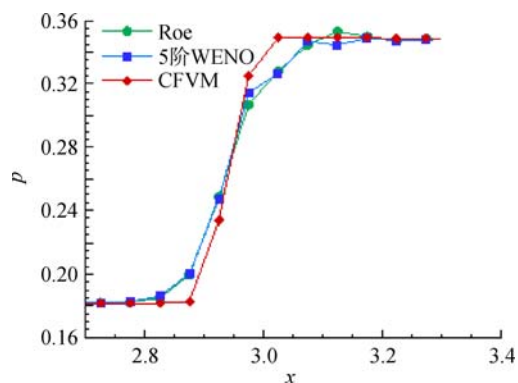
Fig. 2 Pressure contour of shock reflect problem
(15 countours ($p=0.1 \sim 0.38$))



(a) 全局分布图



(b) 入射激波附近放大图



(c) 反射激波附近放大图

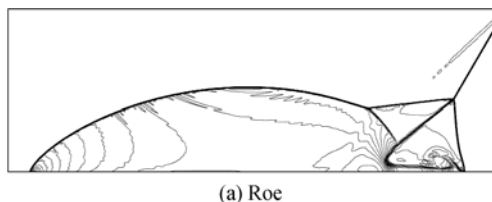
图 3 激波反射问题 $y=1/2$ 处的压强分布曲线

Fig. 3 Pressure distribution curves of shock reflect problem along $y=1/2$

2.3 双马赫反射

该问题计算域为 $[0, 4] \times [0, 1]$,初始时刻在 $x=1/6$ 有一道与下边界成 60° 角,来流马赫数为 10 的右行激波,激波前状态为 $\rho=1, u=0, v=0, p=1/\gamma$ (式中 γ 为比热比,取 1.4).下边界 $[1/6, 4]$ 为物面反射条件,上边界激波后流场由激波关系式得到.计算网格取 961×241 ,在同一网格以相同时间步长进行计算,图 4 给出了 $t=0.2$ 时刻 $[0, 3] \times [0, 1]$ 范围的计算结果.

该问题流场中共有 2 个马赫杆和 1 个接触间断^[17].由图 4 可见,3 种格式均能较为光滑地捕捉流场结构,但 CFVM 格式捕捉间断的宽度要窄于 Roe 格式和 5 阶 WENO 格式,更为重要的是



(a) Roe

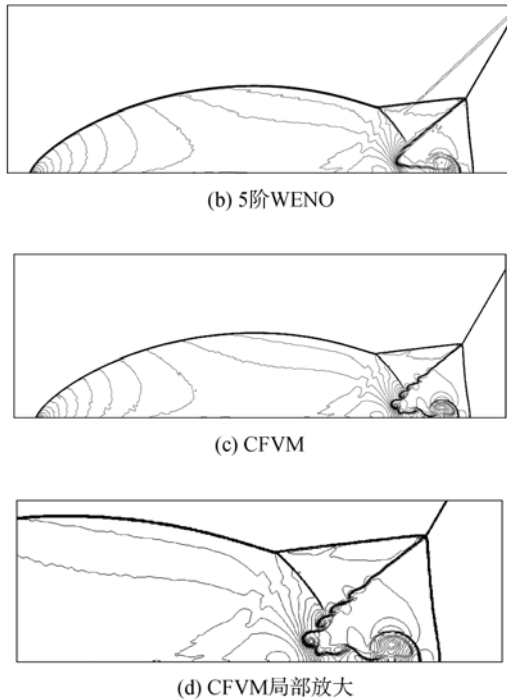


图 4 双马赫反射问题的密度等值线
(40 条等值线($\rho=2\sim 16$))

Fig. 4 Density contour of double Mach reflect problem
(40 counters ($\rho=2\sim 16$))

CFVM 格式分辨出了接触间断的失稳特征,对流动细微结构的捕捉更为细致。

2.4 二维前台阶流动

Sob 问题波系比较复杂,来流马赫数为 3 的自由来流在台阶前产生一道弓形激波,在上壁面反射形成 λ 激波,在三叉点处形成接触间断;另外,流动在台阶拐角处形成中心膨胀波,与台阶上壁面相撞形成一道孤立激波,此激波相对较弱,与反射激波相交后形成弱的接触间断。本文计算网格为 241×81 。

图 5 给出了时间推进至无量纲时间 $t=12$ 时,采用 CFVM 格式与 Roe 格式在同一计算网格相同时间步长计算密度结果的对比。从图中可以看出,CFVM 格式和 Roe 格式均取得较为光滑准确的结果,但 CFVM 格式比 Roe 格式捕捉 λ 激波更为精细,对滑移线和流动结构的捕捉更为清晰。

为了得到更为细致的流场,验证算法的分辨率,在 721×241 的密网格下,采用 CFVM 格式得到的流场计算结果如图 6。从图中可以清晰地看出 λ 激波及反射激波,并能够精细地模拟滑移面失稳特征。

2.5 超声速圆柱绕流

Sob 问题中来流马赫数为 6,采用贴体的曲

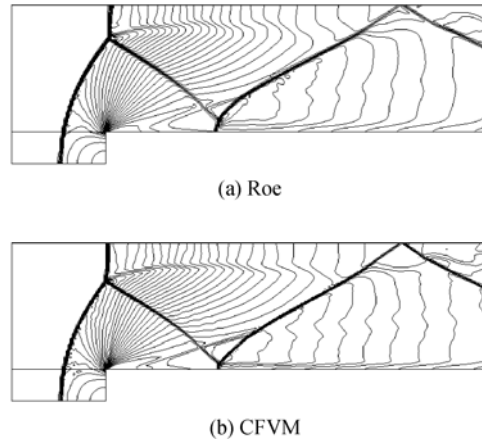


图 5 前台阶问题的密度等值线
(30 条等值线($\rho=0.5\sim 4.5$))

Fig. 5 Density contour of front step problem
(30 counters ($\rho=0.5\sim 4.5$))

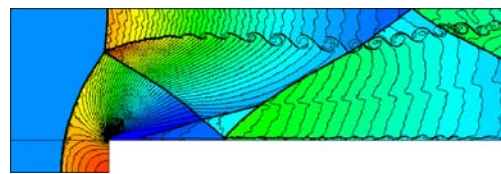


图 6 前台阶问题 CFVM 密网格的密度等值线
(50 条等值线($\rho=0.5\sim 4.5$))

Fig. 6 Density contour of front step problem on CFVM dense grid (50 counters ($\rho=0.5\sim 4.5$))

线坐标系,网格取 61×61 ,在圆柱表面上采用滑移固壁条件。图 7 给出了 Roe 格式、5 阶 WENO 格式及 CFVM 格式在同一计算网格迭代相同步

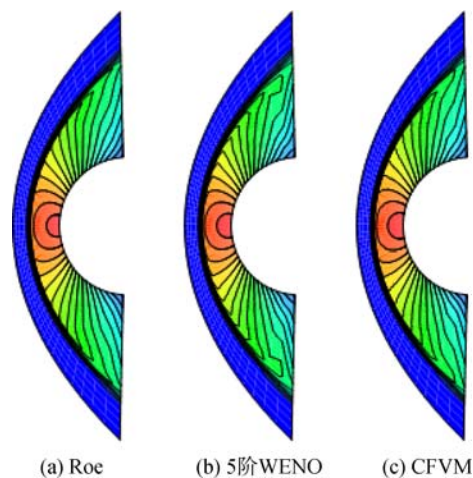


图 7 超声速圆柱绕流问题的压强等值线
(18 条等值线($p=0.05\sim 0.9$))

Fig. 7 Pressure contour of supersonic cylinder problem
(18 counters ($p=0.05\sim 0.9$))

数的压强计算结果(以来流压强无量纲化). 由图可见, 3种方法得到的流场很光滑, 在激波附近无振荡. 图8为沿对称轴压强分布计算结果同精确解^[18]的对比, 横坐标代表距物面的无量纲距离 ξ ($\xi=0$ 对应于物面, $\xi=1$ 对应于激波处). 从图中可以明显看出, CFVM 格式计算结果与精确解最为接近, 并且在激波附近无振荡, 计算结果更为准确.

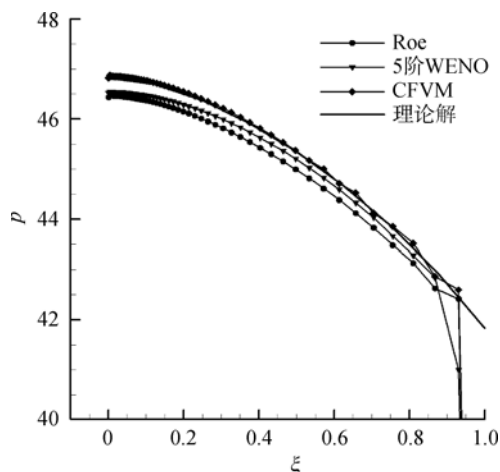


图8 超声速圆柱对称轴压强分布对比

Fig. 8 Pressure distribution comparison of supersonic cylinder symmetry axis

3 结 论

本文在有限体积法中, 推导了5阶WENO格式, 研究了抑制非物理振荡方法, 提出了适用于航天领域超声速流场计算的CFVM格式. 通过计算超声速流场问题, 并与其他计算格式对比, 得出以下结论:

1) 数值试验表明, 利用本文构造的紧致算法可用于高超声速流场计算, 能够在较为精确捕捉激波的同时, 有效抑制间断流场附近的非物理振荡, 并且鲁棒性较好, 证明了基于特征处理的通量限制方法具有抑制振荡的较好能力.

2) 本文发展的有限体积极紧致算法能够较为准确的捕捉激波等间断, 并能分辨捕捉到更为精细的流场结构, 具有较高的精度和分辨率.

3) 算法模板小, 边界处格式易于处理, 便于全场计算精度的统一.

参考文献:

- [1] Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes[J]. Journal of

Computational Physics, 1986, 71(2): 231-303.

- [2] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 77(2): 439-471.
- [3] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 103(1): 16-42.
- [4] Harten A. Nonoscillatory second-order accurate shock-capturing schemes[R]. Paris, France: Methodes Numeriques De L'ingenieur, Comptes Rendus Du Troisieme Congress International, 1983.
- [5] Harten A. High resolution schemes for hypersonic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 1983, 49(3): 357-393.
- [6] Adams N A, Shariff K. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 127(1): 27-51.
- [7] Pirozzoli S. Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock-turbulence interaction[J]. Journal of Computational Physics, 2002, 178(1): 81-117.
- [8] XIE Peng, LIU Chaoqun. Weighted compact and non-compact scheme for shock tube and shock entropy interaction[R]. Reno, NV: 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2007.
- [9] 任玉新, 刘森儿, 张涵信. 守恒型迎风紧致格式[R]. 河南洛阳: 第十一届全国计算流体力学会议, 2002.
- [10] Ravichandran K S. Higher order KFVS algorithms using compact upwind difference operators[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 130(2): 161-173.
- [11] 涂国华, 袁湘江, 夏治强, 等. 一类 TVD 型的迎风紧致差分格式[J]. 应用数学与力学, 2006, 27(6): 675-682.
TU Guohua, YUAN Xiangjiang, XIA Zhiqiang, et al. A class of compact upwind TVD difference schemes[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27(6): 675-682. (in Chinese)
- [12] 袁湘江, 涂国华, 沈清, 等. 利用紧致格式捕捉间断的数值方法研究[J]. 空气动力学学报, 2007, 25(3): 372-376.
YUAN Xiangjiang, TU Guohua, SHEN Qing, et al. Investigation of numerical methods on the capturing discontinuity using compact schemes[J]. Acta Aerodynamic Sinica, 2007, 25(3): 372-376. (in Chinese)
- [13] 涂国华. 超声速边界层稳定性及其高阶激波捕捉格式研究[D]. 四川 绵阳: 中国空气动力研究与发展中心, 2006.
TU Guohua. Study of supersonic boundary layer stability and high order shock-capturing numerical schemes[D]. Mianyang Sichuan: China Aerodynamics Research and Development Center, 2006. (in Chinese)
- [14] 袁湘江, 涂国华, 许坦, 等. 一种通量加权型紧致格式[J].

- 航空动力学报, 2008, 23(1): 64-69.
- YUAN Xiangjiang, TU Guohua, XU Tan, et al. A flux-weighted compact scheme[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(1): 64-69. (in Chinese)
- [15] 沈孟育, 张志斌, 牛晓玲. 满足抑制波动原则的五阶精度紧致格式[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2002, 42(2): 1511-1514.
- SHEN Mengyu, ZHANG Zhibin, NIU Xiaoling. Fifth-order accurate compact scheme that suppresses oscillations [J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2002, 42(2): 1511-1514. (in Chinese)
- [16] 陆志良. 空气动力学[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2009.
- [17] 周禹, 阎超. Roe 格式中不同类型熵修正性能分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2009, 35(3): 356-360.
- ZHOU Yu, YAN Chao. Entropy correction analyses for Roe scheme[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2009, 35(3): 356-360. (in Chinese)
- [18] Lyubimov A N, Rusanov V V. Gas flows past blunt bodies; Part II tables of the gasdynamic functions[R]. NASA TTF-715, 1970.

(编辑: 王碧琚)